Diskrétní matematika

Pojmy

Množiny, relace

D(Potenční množina):$2^X \equiv$ systém všech podmnožin X.

D(Relace):R Relace na $X \equiv$ podmnožina kartézského součinu $X \times X$. Lidsky řečeno, nějaká množina uspořádaných dvojic z X.

D:Relace je *reflexivní*, pokud $\forall x \in X : (x, x) \in R$. (Zapisujeme xRx.)

D:Relace je *symetrická* $\equiv \forall x, y \in X : (xRy) \to (yRx)$.

D:Relace je *antisymetrická* $\equiv \forall x, y \in X, x \neq y : (xRy) \to \neg(yRx)$.

D:Relace je *tranzitivní* $\equiv \forall x, y, z \in X : (xRy \,\&\, yRz) \to (xRz)$.

D:Relace je *uspořádání* $\equiv$ je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní.

D:Relace je *ekvivalence* $\equiv$ je reflexivní, symetrická, tranzitivní.

Uspořádání

N:Většinou uspořádání značíme $(X, \leq)$, čili píšeme $x \leq y$ místo xRy.

D:*Řetězec* $C \subseteq X$ je množina prvků, ktere jsou všechny navzájem uspořádané, čili $\forall x, y \in C : x \leq y \vee y \leq x$. Obvykle jsou uspořádané za sebou.

D:*Antiřetězec* $A \subseteq X$ je množina prvků, kde ani jeden není menší než jiný, čili mezi sebou nemají žádné vztahy. $\forall x, y \in A, x \neq y : \neg(x \leq y \vee y \leq x)$.

Velikost největšího řetězce v uspořádání S značíme $\omega(S)$, velikost největšího antiřetězce $\alpha(S)$.

T(Dlouhý a široký):Pro uspořádání $S = (X, \leq)$ platí $\alpha(S)\omega(S) \geq |X|$.

T(Erdös-Szekerés):Každá posloupnost $n^2 + 1$ reálných čísel obsahuje monotónní posloupnost délky $n + 1$.

T(Dilworth):Každé uspořádání S jde plně pokrýt pomocí $\alpha(S)$ disjunktních řetězců.

Zobrazení

D:*Zobrazení* je jen jiný nazev pro funkci.

V diskrétní matematice budou obvykle zobrazení z konečné množiny M do konečné množiny N. Pozor, N není obor hodnot, zobrazení $f(x) = 2$ může být třeba z $\{1, 2, 3\}$ do $\{1, 2, 3\}$.

D:Zobrazení f je *prosté* $\equiv \forall x, y \in M, x \neq y : f(x) \neq f(y)$.

D:Zobrazení f je *surjektivní* $\equiv \forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y$. Také se říká, že f je „na“.

D:Zobrazení f je *bijekce* $\equiv f$ je prosté a na.

Počítání

D(Faktoriál): $n! \equiv n \cdot (n-1) \cdots 1$.

D(Padající faktoriál): $n^{\underline{k}} \equiv n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$.

D(Závorkové notace):$[k]$ nejčastěji $\equiv \{1, 2, \ldots, k\}$, ale také $[n = 1] \equiv 1$, pokud $n = 1$, a 0 jinak.

D(Kombinační čísla):

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{(n-k)!k!} = n^{\underline{k}}/k! = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

D(Stirlingova čísla 1. druhu):

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \equiv (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

D(Stirlingova čísla 2. druhu):

$$\left\{ n \atop k \right\} \equiv k\left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}$$

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \binom{k}{j}(k-j)^n$$

D(Bellova čísla (počet ekvivalencí)):

$$B(n) \equiv \sum_{i=0}^{n} \left\{ n \atop i \right\}$$

Fibonacciho posloupnost:

$$F_0 \equiv 0, F_1 \equiv 1, F_n \equiv F_{n-1} + F_{n-2}$$
$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}; \varphi = (1 + \sqrt{5})/2.$$

Harmonická posloupnost:

$$H_0 \equiv 0, H_n \equiv \sum_{i=1}^{n} 1/i; H_n \approx ln\, n$$

Catalanova čísla/posloupnost:

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_n = \sum_{i=0}^{n}(C_i C_{n-i})$$
$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}.$$

Binomická věta:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \ldots + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

Zobecněná binomická věta (r reálné):

$$(x+y)^r = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{r}{i}x^i y^{r-i}$$

Grafy

$G = (V, E)$ graf. Hrany $(a, b) \to$ *orientovaný graf*. *Multihrany* $\{a, b\}$, $\{a, b\}$ a *smyčky* $\{a, a\}$ se obvykle neuvažují. Značení: $n = |G| = |V|$ počet vrcholů, $m = ||G|| = |E|$ počet hran.

Stupeň vrcholu je počet hran, které z něj vedou – list má například stupeň 1. Pro graf definujeme minimální stupeň δ, průměrný stupeň d (jako $2|E|/|V|$) a maximální stupeň Δ.

Úplný graf $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$. Je-li orientovaný, říká se mu *turnaj* (mezi 2 vrcholy turnaje je jen jedna or. hrana). Graf H nazveme *doplňkem* jiného grafu G na stejné množině vrcholů, má-li H hrany mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá, a naopak.

Bipartitní graf má dvě skupiny vrcholů, hrany jdou jen mezi skupinami (partitami). *Úplný bipartitní* $K_{m,n}$ má partitu velikosti m, partitu velikosti n, a hrany jsou všechny dvojice mezi nimi.

Kružnice C_n má vrcholy zapojene do řetězu. *Cesta* P_n je kružnice bez hrany. *Hamiltonovská cesta* v grafu G je podgraf takový, že je cestou na všech jeho vrcholech, čili podgraf $P_{|V(G)|}$. Ne všechny grafy Hamiltonovskou cestu obsahují.

G je *souvislý*, pokud se z každého vrcholu dostanu po hranách do každého jiného. Zobecněně: Graf je (hranově n. vrcholově) $(k+1)$-souvislý, pokud po odebrání k (hran n. vrcholů) je graf stále souvislý. Hrana n. vrchol je *kritická*, pokud jejich odebrání sníží k-souvislost. 1-kritická hrana je *most*, 1-kritický vrchol *artikulace*.

Graf T je *strom*, pokud je souvislý a bez kružnice. Graf je *les*, pokud je disj. sjednocení stromů. Každý strom je les, pro les platí $||T|| = |T| - c$, kde c je počet komponent.

Podgraf G' je nějaká podmnožina vrcholů grafu G a nějaká podmnožina těchto vybraných vrcholů. Podgraf je *indukovaný*, pokud vybereme všechny hrany, které mají oba konce v G' a jsou hranami G. Můžeme také říci, že graf G obsahuje I jakoindukovaný podgraf, pokud I umím vytvořit z G jen pomocí odebírání vrcholů.

Klika je podgraf, který je také K_i pro nějaké i. *Nezávislá množina* je množina vrcholů, kde žádné dva spolu nesousedí. *Kostra* je největší podgraf co do počtu vrcholů, který je zároveň stromem. Velikost největší kliky se značí $\kappa(G)$, velikost největší nez. množiny $\alpha(G)$.

Matice sousednosti A pro graf G je taková matice, kde počet sloupců i řádků je $|V|$ a dva vrcholy i a j spolu sousedí hranou, právě když v matici je v místě A_{ij} jednička, na ostatních místech jsou nuly.

Matice incidence B pro graf G je taková matice, kde počet sloupců je $|E|$, počet řádků je $|V|$ a na pozici A_ie je jednička, pokud vrchol i je jedním ze dvou konců hrany e, nula jinak. Graf nazýváme *k-regulární*, pokud má všechny stupně stejné a rovnají se k. Každá kružnice je 2-regulární graf.

Řekneme o grafu, že je *k-obarvitelný*, pokud $\exists$ funkce $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, k\}$ taková, že každá hrana je dvoubarevná, čili $\forall uv \in E(G) : c(u) \neq c(v)$. *Barevnost grafu* G je minimální k takové, že graf G je k-obarvitelný. Všimněte si, že 2-obarvitelný graf je bipartitní a naopak.

O grafu G, $|G| = n$ řekněme, že je *d-degenerovaný*, pokud pro něj existuje (lineární) uspořádání všech vrcholů $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ s následující vlastností:

První vrchol v_1 v tomto uspořádání má stupeň nejvýše d. Vrchol v_2 může mít v G stupeň $d+1$, ale musí platit, že v grafu $G - v_1$ (po odebrání vrcholu v_1) už má stupeň nejvýše d. Obecně vrchol v_i musí mít nejvýše stupeň d v grafu $G - v_1 - v_2 - v_3 \ldots - v_{i-1}$.

T(Princip sudosti):$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$, čili specielně je součet stupňů sudé číslo.

T(O bipartitních grafech):Graf G je bipartitní, právě když neobsahuje lichou kružnici jako podgraf.

Techniky

Matematická indukce

Náhled na přirozená čísla:

- 0 je přirozené číslo. (1 též.)
- Pokud x je přirozené číslo, $x+1$ je také přirozené číslo.

Druhé pravidlo je ve formě implikace – to, že x je přirozené číslo, máme „zadarmo“ jako předpoklad. Stejným způsobem se dá nahlížet na cokoli, co má „uvnitř“ strukturu přirozených čísel.

Příklad 1: $\sum_{i=0}^{n}(2i+1) = (n+1)^2$.

- Základ indukce: $\sum_{i=0}^{0}(2i+1) = 1 = (0+1)^2$.
- Indukční krok: Dokazujeme implikaci. Předpokládem je, že vzorec $\sum_{i=0}^{n}(2i+1)$ platí pro všechna čísla od 0 do n. Našim cílem je ukázat, že vzorec platí i pro hodnotu $n+1$.

  Standardní postup: Situaci (vzorec) pro $n+1$ upravíme na vzorec pro n a nějaký zbytek, vzorec pro n nahradíme pravou stranou pro n (indukční předpoklad) a pravou stranu pro n a zbytek upravíme na pravou stranu pro $n+1$.

$$\sum_{i=0}^{n+1}(2i+1) = \left(\sum_{i=0}^{n}(2i+1)\right) + (2(n+1)+1) =$$

$$= (n+1)^2 + (2n+3) = n^2+2n+1+2n+3 = n^2+4n+4 = (n+2)^2.$$

Příklad 2: Mějme rovinu a na ni n přímek v obecné poloze (žádné dvě nejsou rovnoběžné, žádné tři se neprotínají ve stejném bodě). Pak tyto přímky rovinu sekají na $\binom{n+1}{2}+1$ oblastí.

- Základ indukce: Jedna přímka seká rovinu na 2 oblasti.
- Indukční krok: Dokazujeme implikaci. Máme v rovině $n+1$ přímek v obecné poloze. Víme, že když jednu odebereme, v rovině zbude n přímek a dostaneme $\binom{n+1}{2}$ oblastí (indukční předpoklad). Vrátíme tedy přímku do roviny, tato přímka má n průsečíků z ostatními přímkami a tedy protíná $n+1$ oblastí napůl, čili vznikne $n+1$ nových oblastí (zbytek). Sečteme:

$$\binom{n+1}{2} + 1 + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} + 1 = \binom{n+2}{2} + 1.$$

Postup řešení sumačního příkladu

- Zkusit malé případy, uhodnout výsledek, dokázat indukcí.
- Rozložit sumu různými způsoby (a la $\sum k/2^k$).
- Využít aritmetiku sum, vyměnit sumace.
- Použít binomickou větu.
- Když nic, tak aspoň vymyslet nějaké odhady.
- Najít lineární rekurenci.
- Použít vytvořující funkce.
- Použít diskrétní integraci.

Známé sumy

$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{i+1} - 1$. $\quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

$\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$. $\quad \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$.

$\sum_{i=r}^{n}\binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$. $\quad \sum_{i=0}^{k-1}\binom{k+i}{k-i-1} = F_{2k}$.

$\sum_{i=0}^{k}\binom{k+i}{k-i} = F_{2k+1}$. $\quad \sum_{i=0}^{n} i^2 = n(n+1/2)(n+1)/3$.

$\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\sum_{i=0}^{n} i)^2$. $\quad \sum_{i=0}^{\infty} 1/2^i = 2$.

$\sum_{i=0}^{\infty} i/2^i = 2$.

Princip inkluze a exkluze

Velikost sjednocení můžeme počítat pomocí postupného přičítání a odčítání větších a větších průniků (jejichž velikosti budou menší). Zapsáno matematicky:

$$|\bigcup_{1\ldots n} A_i| = \sum_{j\geq 0}(-1)^j \sum_{I\in\binom{1\ldots n}{j}} |\bigcap_{I} A_i|$$

Příklad: Spočítejte počet rozmístění 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, aby žádné 4 neležely na stejném řádku nebo sloupci.

Myšlenka inkluze a exkluze spočívá v tom, že umíme náš problém rozdělit na nějaké části pomocí pravidelnosti. Obecně *jev* (pojem z pravděpodobnosti) bude nějaká událost, kterou budeme chtít spočítat nebo vyjádřit. Úkol se nás tedy ptá na:

$|A|$, kde $A = \{x; x$ je rozmístění 8 kamenů na šachovnici 4×4 tak, že žádné 4 neleži na stejném řádku nebo sloupci$\}$.

x je tedy onen jev, který chceme spočítat. Všimněme si, že ho můžeme rozdělit na menší kusy pomocí logických spojek $\wedge$, $\neg$ a $\vee$:

$A = \{x; x$ je rozmístění 8 kamenů tak že 4 nejsou na prvním řádku $\wedge$ 4 nejsou na druhém řádku $\wedge$ 4 nejsou na třetím řádku $\ldots\}$.

Vidíme, že naše jevy umíme rozložit na menší části pomocí operace $\wedge$. Úplně stejně umíme rozložit i množinu A, akoráte pomocí operace $\cap$ (není náhoda, že vypadá jako $\wedge$:

Pokud $A_i \equiv \{x; x$ je množina rozložení 8 kamenů tak, že 4 nejsou na i-tém řádku $\}$ a $B_i \equiv \{x; x$ je množina rozložení 8 kamenů tak, že 4 nejsou na i-tém sloupci $\}$, tak

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4.$$

Poslední potíž máme s tím, že princip inkluze a exkluze počítá průniky a ne sjednocení. Na to nam ale pomohou De Morganova pravidla, platí totiž:

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \ldots$$

Pokud přecházíme z původního problému na problém opačný, často se říká, že počítáme *špatné jevy* – zde je vidět proč, $\overline{A_1} = \{x; x$ je rozmístění 8 kamenů na šachovnici tak, že 4 kameny **jsou** na prvním řádku.$\}$.

Velikosti jednotlivých špatných jevů spočítáme snadno úvahou: $|\overline{A_i}| = |\overline{B_i}| = \binom{12}{4}$.

Protože kamenů je jen 8, tak mohou být max. dva řádky nebo sloupce najednou zaplněny. Z toho máme $|\overline{A_i} \cap \overline{A_j}| = |\overline{B_i} \cap \overline{B_j}| = 1$ a velikosti průniků trojic a výše už jsou nulové. Ještě si rozmyslíme, že průnik řadku a sloupce není nulový: $|\overline{A_i} \cap \overline{B_j}| = \binom{9}{1}$.

Nyní aplikujeme princip inkluze a exkluze, jak ho známe:

$$|\overline{A}| = |\bigcup \overline{A_i}| = \sum_i |\overline{A_i}| + \sum_i |\overline{B_i}| - \sum_{i,j} |\overline{A_i} \cap \overline{A_j}| -$$

$$- \sum_{i,j} |\overline{B_i} \cap \overline{B_j}| - \sum_{i,j} |\overline{A_i} \cap \overline{B_j}| + 0 - 0 \ldots$$

Grafové důkazy

Indukce

Standardně se dělá podle počtu vrcholů nebo podle počtu hran. Klasický průběh: odeberu vrchol nebo hranu, aplikuji na zbytek grafu indukci, vrchol nebo hranu vrátím a zdůvodním, že dokazovaná věta platí i nadále.

Příklad: Každý souvislý graf obsahuje alespoň $|V|-1$ hran. Důkaz: Aplikujeme indukci podle poču hran.

Začátek indukce: Pokud souvislý graf neobsahuje kružnici, tak je stromem, a tedy má přesně $|E| = |V|-1$ hran a tvrzení platí.

Indukční krok. Nechť graf kružnici obsahuje. Vezměme jednu hranu na kružnici. Hranu e odebereme. Zbylý graf je souvislý, a tedy má alespoň $|V|-1$ hran. Přidáním hrany se počet hran jen zvýšil, a tedy nerovnost $|E| \geq |V|-1$ stále platí.

Kdy indukce nefunguje: pokud chceme něco dokazovat pro k-regulární grafy, je těžké indukci použít. Nejmenší k-regulární graf je sice K_{k+1}, ale to neznamená, že každý regulární graf jde vytvořit za pomoci grafu K_{k+1}.

Důkazy algoritmické

Často se používá prohledávání do šířky nebo hloubky, případně hladový algoritmus.

Příklad: Každý strom na alespoň 2 vrcholech obsahuje alespoň dva listy.

Důkaz: Začněme v libovolném vrcholu v. Pokud už je listem, tak si označíme už jeden list za nalezený. Když ne, tak má stupeň alespoň 2. Vydejme se prohledáváním do hloubky, jednou po jedné jeho hraně a podruhé po druhé jeho hraně. Procházejme stromem, dokud to jde.

Jakmile prohledávání už nemůže zpět, tak to nemůže být proto, protože z vrcholu vedou hrany zpátky – kdyby vedly, byla v grafu kružnice. Musí to být tedy proto, protože z daného konečného vrcholu už není cesta zpět. Jeho stupeň tedy musí být jedna.

Protože jsme poslali prohledávání na dvě strany, dostaneme tak dva vrcholy se stupněm jedna a tedy dva listy.

Důkazy přímé a sporem

Občas je dobré použít „pseudoalgoritmický důkaz“: předpokládejme, že objekt (nejdelší cesta, kružnice nějaké délky) je už nalezen, co to potom říká o vlastnostech celého grafu? Výhodou je, že danou cestu/kružnici nemusíme nalézt, ale „spadne z nebe“.

Dalším užitečným trikem je zkusit něco dokazovat sporem, zvláště s rovinností grafu nebo se sudostí/lichostí stupňů.