9. CVIČENÍ Z OPTIMALIZACE

Dualita a ještě trochu simplexu

Příklad první Použijte simplexovou metodu k řešení lineárního programu:

$$\begin{aligned} \max 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad druhý I následující úlohu vyřešte pomocí simplexového algoritmu:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Příklad třetí Sestrojte duální úlohu k následující úloze:

$$\begin{aligned} \max x_1 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \leq 0 \\ x_4 \geq 0 \\ x_2 - 6x_3 + x_4 \leq 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 \geq 5 \end{aligned}$$

Příklad čtvrtý Sestrojte duální úlohu k následující úloze:

$$\begin{aligned} \max 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Definice: *Dominující množina* v grafu G je množina vrcholů D taková, že každý další z $V(G)$ buď náleží do D, nebo je sousedem vrcholu náležícího do D.

Příklad pátý Sestrojte celočíselný program k úloze hledání minimální dominující množiny v grafu. Pak z této úlohy udělejte její lineární relaxaci a tu relaxaci převeďte na duální program.

Až budete mít duální program, zkuste se zamyslet nad tím, jestli existuje nějaká grafová interpretace tohoto duálního programu.

Příklad šestý Dualita nám umožňuje vyřešit úlohu lineárního programování „haluzí“. Dokážete uhodnout optimální řešení primárního i duálního programu z příkladu 4 haluzí a dokázat, že obě jsou optimální?