Definice: Nechť P je konvexní mnohostěn a $c \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall x \in P : c^T x \leq t$ a zároveň $\exists x : c^T x = t$, označíme $\{x | c^T x = t\}$ jako *tečnou nadrovinu* n_i konvexního mnohostěnu P.

Průniky tečných nadrovin s mnohostěnem $S = n_i \cap P$ pak nazýváme *stěnami* mnohostěnu P. K nim také započítáváme dvě *nevlastní stěny* $\emptyset$ a P.

Definice: *Vrchol* mnohostěnu P je stěnou dimenze 0. *Hrana* P je stěnou dimenze 1. Nakonec *faseta* P je stěnou dimenze $d-1$.

Definice: d-dimenzionální *simplex* je konvexním obalem $d+1$ afinně nezávislých bodů. Pro jednoduchost si d-dimenzionální simplex v $\mathbb{R}^d$ můžeme představit jako

$$\operatorname{conv}(0, (0,0,\ldots,0,1), (0,0,\ldots,1,0), \ldots, (1,0,\ldots,0,0))$$

d-dimenzionální krychle je konvexním obalem všech 0/1-vektorů z $\mathbb{R}^d$.

Křížový mnohostěn definujeme jako $\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots + |x_n| \leq 1\}$. Ve třech rozměrech mu říkáme *osmistěn.*

PŘÍKLAD PRVNÍ Mějme konvexní mnohostěn P. Dokažte, že průnik dvou stěn P je také stěna P.

PŘÍKLAD DRUHÝ Uvažte váš oblíbený konvexní mnohostěn P a najděte dvě různé tečné nadroviny n_a, n_b, jejichž neprázdný průnik s P určuje tutéž stěnu.

PŘÍKLAD TŘETÍ Dokažte, že libovolná stěna simplexu je sama simplexem.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ *Pravidelný konvexní mnohostěn* je takový konvexní mnohostěn, kde je každá faseta isomorfním pravidelným mnohostěnem a každý vrchol je určen stejným počtem faset.

V 5 rozměrech a výše už existují jen 3 neisomorfní pravidelné konvexní mnohostěny: simplex, křížový mnohostěn a vícerozměrná krychle.

- Odvoďte počet všech stěn d-dimenzionální krychle.
- Odvoďte počet k-dimenzionálních stěn d-dimenzionálního simplexu.

Tip: Pokud nevíte jak na to, zkuste nejdříve počítat stěny $2, 3, 4, 5$-dimenzionálních objektů.

PŘÍKLAD PÁTÝ Rozhodněte, jestli vrchol $v = (1,1,1,1)$ je vrcholem mnohostěnu definovaného následujícím systémem nadrovin:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & -12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

PŘÍKLAD ŠESTÝ Nakreslete Hasseho diagram částečného uspořádání stěn čtyřstěnu. Jako uspořádání použijte inkluzi.

PŘÍKLAD SEDMÝ Pro pravidelný konvexní mnohostěn v prostoru (říká se jim *Platónská tělesa* označme počet vrcholů mnohostěnu V, počet 1-stěn (hran) E a počet 2-stěn (stěn) F.

Pak můžeme pro 3-rozměrné pravidelné konvexní mnohostěny formulovat Eulerovu poučku:

$$V - E + F = 2,$$

a protože každá stěna má právě p hran a každý vrchol vidí právě q hran, máme:

$$pF = 2E = qV$$

Pomocí těchto vztahů (anebo jinak) odvoďte, kolik existuje neisomorfních pravidelných konvexních mnohostěnů v prostoru.

Tip: Zkuste nejprve odvodit $1/q + 1/p = 1/2 + 1/E$. Pomocí této rovnosti už to půjde lehko.

Příklad osmý Nalezněte všechny vrcholy mnohostěnu zadaného takto:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 14 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$