2. DÚ Z ÚVODU DO APROXIMACÍ

hladové algoritmy, SAT, LP, a další

Každý příklad je za dva body. Termín: **22. 12. 2015 17:19.** Řešení odevzdávejte emailem nebo osobně na cvičení. Pokud by zadání bylo nejasné nebo podle vás obsahovalo chybu, nebojte se mi napsat email.

PŘÍKLAD PRVNÍ V problému MAXIMÁLNÍ k-ŘEZ dostaneme na vstupu neorientovaný graf G a váhy na hranách $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$. Cílem je rozdělit všechny vrcholy grafu do k hromádek $V_1, V_2, \dots, V_k$ tak, aby součet všech mezihromádkových hran byl co největší možný.

Navrhněte a zanalyzujte pravděpodobnostní $\frac{k-1}{k}$-aproximační algoritmus pro MAXIMÁLNÍ k-ŘEZ.

PŘÍKLAD DRUHÝ Na přednášce jste slyšeli algoritmus LP-SAT pro MAX SAT, který vedl (po zkombinování s RAND-SAT) k 3/4-aproximačnímu algoritmu.

Místo zkombinováni s RAND-SATEM zkusme jiný trik: začneme z optimálního řešení (y^*, z^*) pro stejné LP jako v algoritmu LP-SAT, ale místo nastavení $P[x_i = 1] = y_i^*$ nastavíme $P[x_i = 1] = f(y_i^*)$, kde funkce $f\colon [0,1] \to [0,1]$ je definováná takto:

$$f(p) = \begin{cases} \frac{3p}{4} + \frac{1}{4} & \text{pro } 0 \le p \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{pro } \frac{1}{3} \le p \le \frac{2}{3} \\ \frac{3p}{4} & \text{pro } \frac{2}{3} \le p \le 1 \end{cases}$$

Dokažte, že tato volba bez jakéhokoli kombinováni vede k $\frac{3}{4}$-aproximačnímu algoritmu pro MAX SAT.

PŘÍKLAD TŘETÍ Uvažme problém BALANCOVÁNÍ GRAFU, kde na vstupu je neorientovaný graf G s váhami na hranách $p\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$. Cílem algoritmu je zorientovat všechny hrany tak, že ten nejtěžší vrchol (vrchol s největší vahou hran orientovaných k němu) má co nejmenší možnou váhu. Formálně je náš cíl najít přiřazení hran, které minimalizuje účelovou funkci $u = \max_{v \in V} \sum_{e \in E; e \text{ orientována do } v} p(e)$.

Je dobré si všimnout, že tento problém je vlastně problémem rozvrhovacím.

Navrhněte a zanalyzujte 2-aproximační algoritmus pro BALANCOVÁNÍ GRAFU.

Tip: Můžete (ale nemusíte) využít lineární programování.

PŘÍKLAD ČTVRTÝ V metrickém PROBLÉMU k DODAVATELŮ máme na vstupu $m + n$ bodů, kde m z nich jsou předem označeni jako *dodavatelé* a zbylí jsou *zákazníci*. Mezi všemi těmito body je metrika (splňující trojúhelníkovou nerovnost). Úkolem v tomto problému je vybrat k dodavatelů tak, že minimalizujeme nejdelší vzdálenost mezi zákazníkem a jeho nejbližším vybraným dodavatelem.

Navrhněte a zanalyzujte 3-aproximační algoritmus pro PROBLÉM k DODAVATELŮ.

Tip: Tento problém je podobný PROBLÉMU k CENTER, který bude na cvičení a jehož aproximace je popsána v knize Williamson, Shmoys, kapitole 2.2.